Funciones L y formas modulares: charla informativa

Nathan Ryan

nryan@fing.edu.uy

13 de agosto

La función ζ de Riemann

Sea $s \in \mathbb{C}$. Definimos: $\zeta(s) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$:

- converge en un semiplano ($\Re s > 1$)
- tiene una continuación meromorfa
- tiene un número finito de polos ($s = 1$ es el único)
- satisface una ecuación funcional.

¿Pero que tiene que ver con la teoría de números?

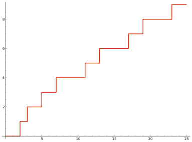
- tiene la factorización:

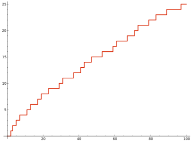
$$\prod_{p \text{ primo}} \frac{1}{1-p^{-s}}.$$

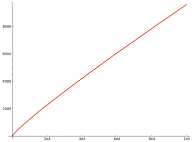
- sin tener cuenta del tema de la convergencia, esto se puede obtener usando dos resultados simples pero fundamentales en la matemática: la fórmula para las series geométricas y el teorema fundamental de la aritmética.
- **¡Hacélo!**
- El hecho que $\zeta(s)$ tiene polo cuando $s = 1$ es una demostración que hay una infinitud de primos.

Más conexiones...

Definimos $\pi(x) = \#\{p \leq x : p \text{ es primo}\}$. **Hacé** una gráfica de $\pi(x)$ vs x para $x \leq 25$ y para $x \leq 100$.





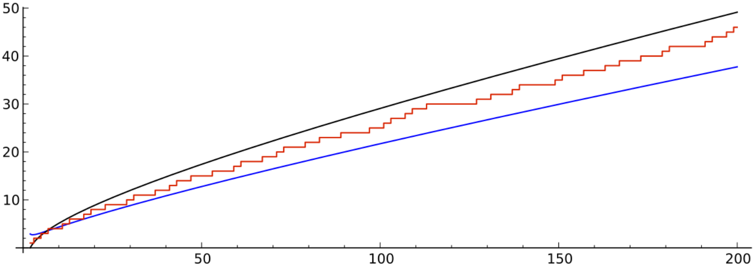


Una observación de Gauss:

- es posible ver que a grandes rasgos, la cantidad de primos acotados por x es aproximadamente x divido por el doble de cuanto dígitos tiene x.

Teorema de los números primos

El teorema nos dice $\pi(x) \sim \frac{x}{\log x} \sim Li(x) := \int_2^x \frac{dt}{\log t}$.



Se puede demostrar que:

- si $\Re(s) \geq 1$, $\zeta(s) \neq 0$
- si $\Re(s) \leq 0$ y si $s \neq -2, -4, -6, \ldots, \zeta(s) \neq 0$ (estos son los ceros triviales)

Nos deja con el hecho que todos los ceros no triviales se encuentran en la franja crítica: $0 < \Re(s) < 1$ y podemos enunciar la hipótesis de Riemann (RH):

- si s es un cero de $\zeta(s)$ no trivial, tenemos $\Re(s) = 1/2$.

Se puede demostrar que RH es equivalente a esta estimación de $\pi(x)$:

$$\pi(x) = Li(x) + O(x^{1/2+\varepsilon}).$$

Esto quiere decir, más o menos, que la primera mitad de los dígitos del n-ísimo primo son los dígitos de $Li^{-1}(n)$. **¡Probálo!**

Una forma modular

Ramanujan en un momento de inspiración (uno de muchos) definió esta función:

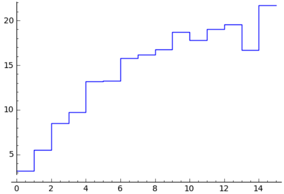
$$\Delta(q) = q \prod_{n \geq 1} (1 - q^n)^{24} = \sum_{n \geq 1} \tau(n) q^n.$$

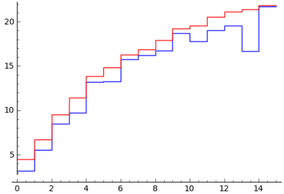
Calculá las primeras 2 coeficientes:

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1	-24	252	-1472	4830	-6048	-16744	84480	-113643	-115920	534612	-370944

¿Qué observás?

- Notá, que la función τ es multiplicativa: $\tau(2)\tau(3) = \tau(6)$, etc.





- La primera gráfica es $\log|\tau(p)|$ vs p y la segunda tiene una cota de $\log(2p^{11/2})$ en rojo. Esta cota Ramanujan también la observó. Mordell en los años 1920 demostró las dos obervaciones de Ramanujan.

Una forma modular

Si escribimos $q = e^{2\pi iz}$, vemos fácilmente que

- $\Delta(z) = \Delta(z+1)$
- con un poco de trabajo se puede ver que $\Delta(-1/z) = z^{12}\Delta(z)$.

De estos dos hechos se puede concluir que $\Delta(q)$ es una forma modular de peso 12.

- Un problem abierto acerca de $\tau(n)$: La conjeture de Lehmer dice que $\tau(n) \neq 0$ para todo $n \geq 1$.
- **¡Investigalo!**

¿Por qué las dos cosas en una sola clase?

Según las conjetura folklóricas, hay una biyección entre last formas modulares "interesantes" y las L-funciones. Es algo de folklore por ni hay un definición estandar de que es una L-función ni de lo que quiere decir "interesante". Más concretamente, les cuento de algunas conexiones explícitas:

- a cada forma modular (que es un autovector para los operadores de Hecke) se puede asignar una L-función
- se puede calcular una forma modular empezando sólamente con las propiedades analíticas de la L-función asignada a la forma modular
- la conjetura de Taniyama-Shimura (mostrada por Wiles) dice a cada curva elíptica E se puede asociar una forma modular f tal que la L-función de E es igual a la de f